第 2 节 垂直关系证明思路大全（★★☆）

内容提要

本节主要归纳立体几何大题第一问常见的证明垂直关系的思路，先梳理需要用到的一些定理.

1．线面垂直的判定定理：如图 1，若 $l\perp a$，$l\perp b$，$a,b\subset\alpha$，$a\cap b=P$，则 $l\perp\alpha$.

2．面面垂直的判定定理：如图 2，若 $a\perp\beta$，$a\subset\alpha$，则 $\alpha\perp\beta$.

3．面面垂直的性质定理：如图 3，若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=AB$，$a\subset\alpha$ 且 $a\perp AB$，则 $a\perp\beta$.

4．三垂线定理：如图 4，$a\subset\alpha$，l 在 α 内的射影是 b，若 $a\perp b$，则 $a\perp l$，此结论反过来也成立.

①作用：如图 4，想证明 l 垂直于面 α 内的 a，只需证 l 在面 α 内的射影与 a 垂直，这就将异面垂直问题转化为了共面垂直问题. 注意，三垂线定理在大题中要给出证明过程，再使用.

②定理的证明过程：因为 $\begin{cases}c\perp\alpha\\ a\subset\alpha\end{cases}$，所以 $a\perp c$，故 $a\perp b\Leftrightarrow a\perp$ 图中的三角形所在平面 $\Leftrightarrow a\perp l$.

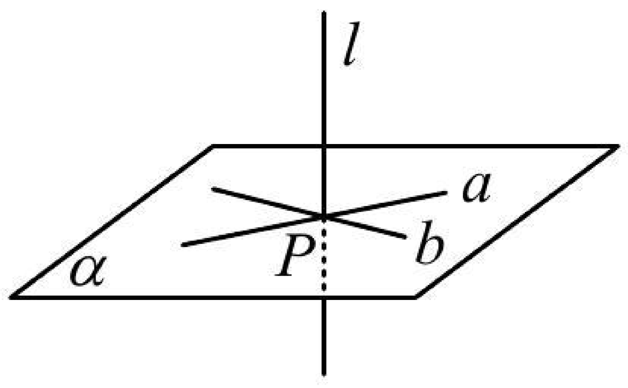


图1

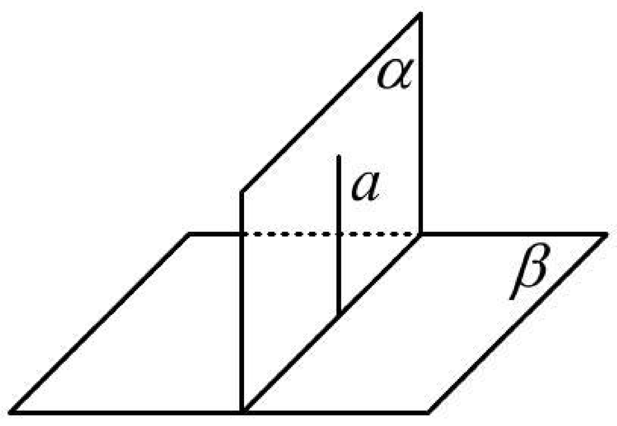


图2

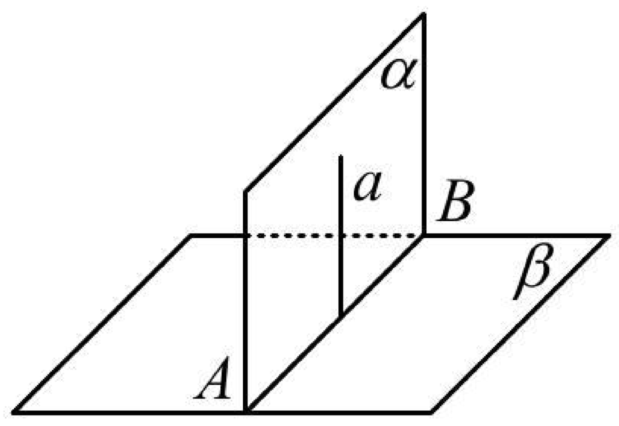


图3

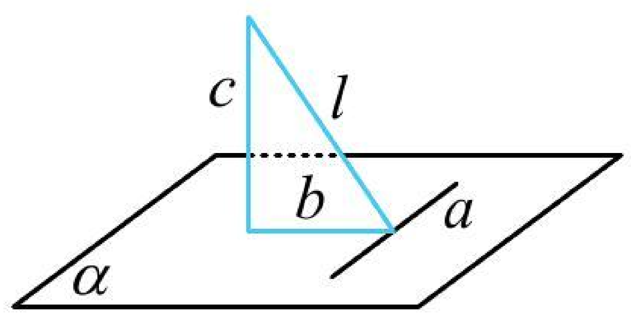


图4

空间中证明垂直关系的常见思路：

1．证线面垂直：证明直线垂直于平面内的两条相交直线即可.

2．证线线垂直：若线与线是共面的，则考虑用平面几何的方法来证；若异面，如图 5，要证异面直线 l 和 a 垂直，可证明 l 垂直于 a 所在的某个平面 α，找到 α 是解决问题的关键，常用两种方法来找：

①逆推法：把我们要证的结论与给出的某垂直条件结合，看能得出什么样的线面垂直，这样我们就找到了面 α，再来分析怎么证 $l\perp\alpha$，问题就回到前面 1 的证线面垂直了.

②三垂线定理法：如图 6，若 l 在平面 β 内，a 在 β 内的射影 b 很好找，由三垂线定理，$l\perp b\Leftrightarrow l\perp a$，所以 a 和射影 b 构成的平面（图中三角形所在平面）即为我们要找的 α.

3．证面面垂直：核心是证线面垂直，若不会找线，可通过在其中一个面内找与交线垂直的直线，如上面图 3 中的 a，找到这条直线，问题就回到前面 1 的证线面垂直了.

4．已知面面垂直：常过一个面内的点作交线的垂线，得到线面垂直，再得到我们需要的线线垂直.

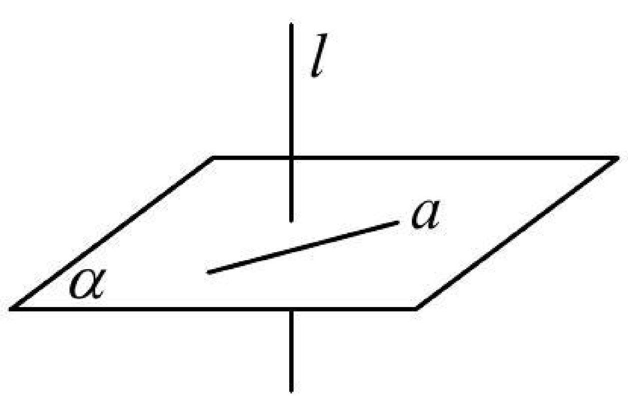


图5

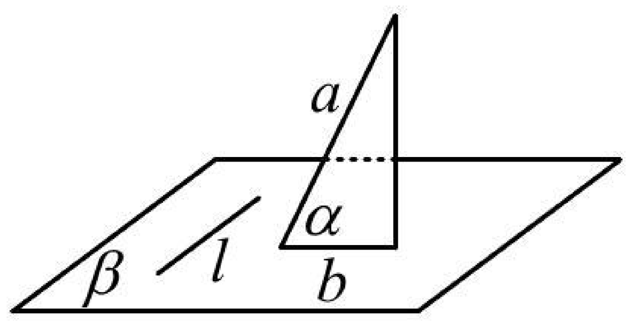


图6

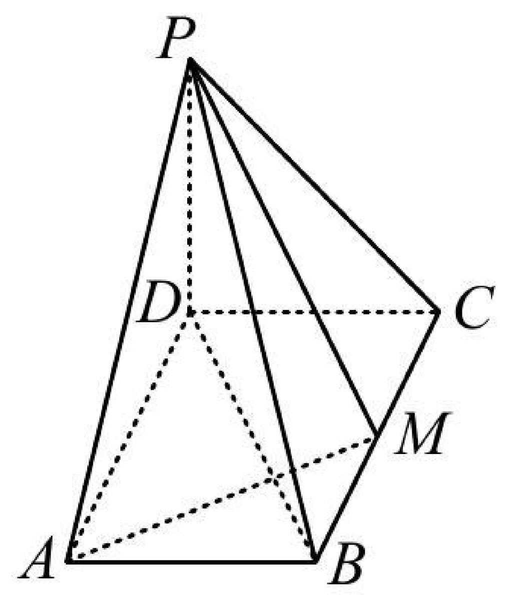
提醒：本节题目只节选了原题中的 1 个小问，所给条件可能有多余.

典型例题

类型Ⅰ：线面垂直的逆推思路

【例 1】如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PD=CD=1$，$PC=BC=\sqrt{2}$，M 为 BC 上的点，

且 $AM\perp$ 平面 PBD，证明：$PD\perp$ 平面 $ABCD$.



证明：（要证结论，只需证 $PD\perp$ 面 $ABCD$ 内的两条相交直线，条件中有线面垂直，故其中一条选 AM）

因为 $AM\perp$ 平面 PBD，$PD\subset$ 平面 PBD，所以 $AM\perp PD$ ①，

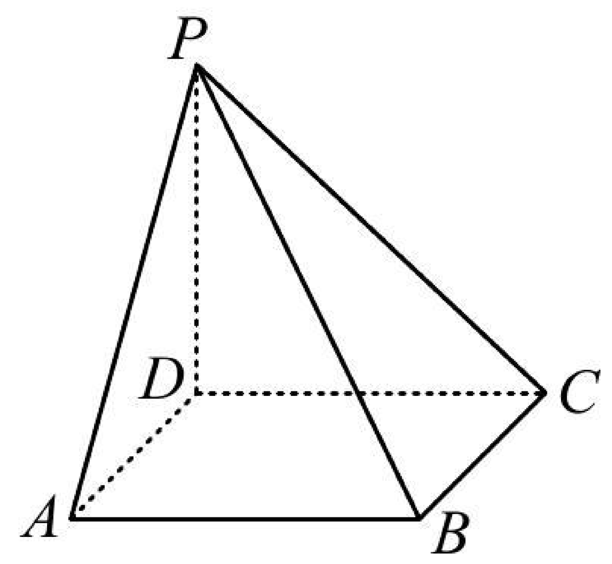
（另一条选谁呢？剩余条件都是长度，用长度证垂直，想到勾股定理，ΔPCD 就满足勾股定理）

因为 $PD=CD=1$，$PC=\sqrt{2}$，所以 $PD^2+CD^2=2=PC^2$，故 $PD\perp CD$ ②，

因为 AM，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，AM 与 CD 是相交直线，结合①②可得 $PD\perp$ 平面 $ABCD$.

【反思】证线面垂直的核心是找线，这个线一定（隐藏）在条件里，尝试翻译即可.

【变式】（2020·新高考Ⅰ卷节选）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l，证明：$l\perp$ 平面 PDC.



证明：（图中没给交线 l，需先把它画出来，注意到 $BC/\!/AD$，故画交线可用线面平行的性质定理）

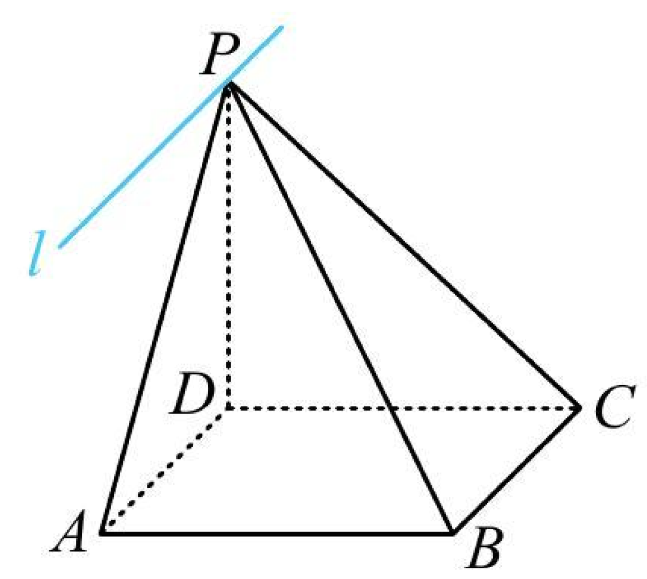
由 $ABCD$ 是正方形知 $BC/\!/AD$，又 $BC\not\subset$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，所以 $BC/\!/$ 平面 PAD，

而 $BC\subset$ 平面 PBC，平面 $PBC\cap$ 平面 $PAD=l$，所以 $BC/\!/l$，如图，

（在面 PDC 内直接找两条与 l 垂直的直线不易，故考虑用 $BC/\!/l$ 来转化为证 $BC\perp$ 平面 PDC）

因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，$BC\subset$ 底面 $ABCD$，所以 $BC\perp PD$，又 $BC\perp CD$，

且 PD，$CD\subset$ 平面 PCD，$PD\cap CD=D$，所以 $BC\perp$ 平面 PCD，结合 $BC/\!/l$ 可得 $l\perp$ 平面 PCD.

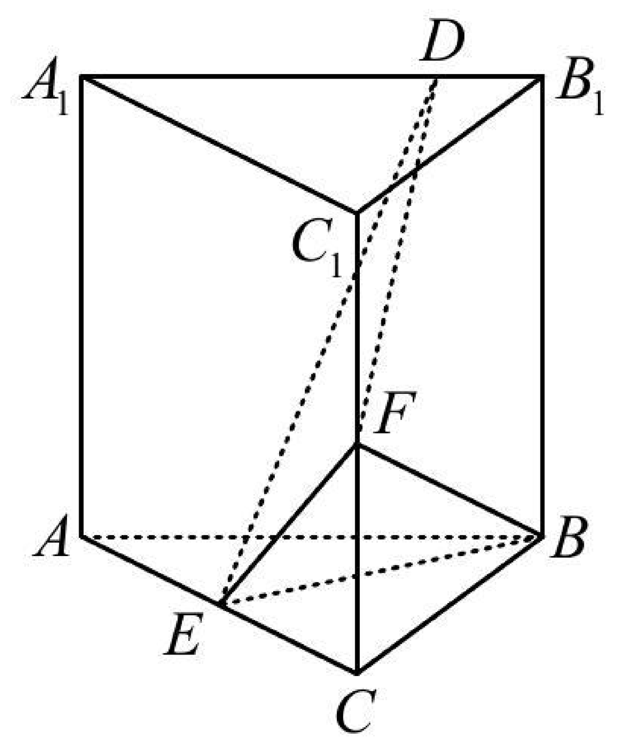


【反思】若发现直线 l 与平面 α 内的直线的垂直条件少，则可考虑转化为证 l 的某平行线与 α 垂直.

类型Ⅱ：线线垂直的逆推思路

【例 2】（2021·全国甲卷节选）已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 AA_1B_1B 为正方形，$AB=BC=2$，E，

F 分别为 AC 和 CC_1 的中点，D 为棱 A_1B_1 上的点，$BF \perp A_1B_1$，证明：$BF \perp DE$.



证明：（有两个切入点，我们都给出来，切入点 1：要证 $BF \perp DE$，考虑证明 $BF \perp DE$ 所在的某平面，要找到这个平面，尝试逆推法，假设 $BF \perp DE$ 了，结合条件中还有 $BF \perp A_1B_1$，于是 BF 应 $\perp$ A_1B_1 和 DE 构成的平面，此面可扩展为下图中的面 B_1DEG，故考虑证 $BF \perp$ 面 B_1DEG；切入点 2：证异面垂直也可用三垂线定理来思考，观察发现 BF 在右侧面内，而 DE 在右侧面的投影容易找到，过 E 作右侧面的垂线即得到投影 B_1G，故只需证 $BF \perp$ 平面 B_1DEG）

如图，取 BC 中点 G，连接 EG，B_1G，因为 E 为 AC 中点，所以 $EG // AB$，

又 $AB // B_1D$，所以 $EG // B_1D$，故 B_1，D，E，G 四点共面，（下面证 $BF \perp B_1G$，可在面 BCC_1B_1 中考虑）

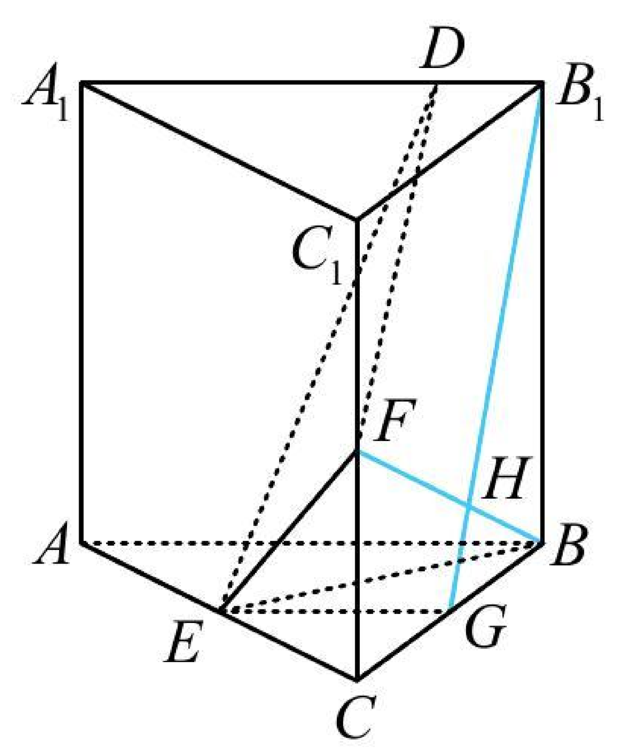
由题意，$CF = 1$，$BC = 2$，所以 $\tan\angle CBF = \dfrac{CF}{BC} = \dfrac{1}{2}$，又 $BG = 1$，$BB_1 = AB = 2$，所以 $\tan\angle BB_1G = \dfrac{BG}{BB_1} = \dfrac{1}{2}$，

所以 $\tan\angle CBF = \tan\angle BB_1G$，故 $\angle CBF = \angle BB_1G$，因为 $\angle BB_1G + \angle BGB_1 = 90^\circ$，所以 $\angle CBF + \angle BGB_1 = 90^\circ$，

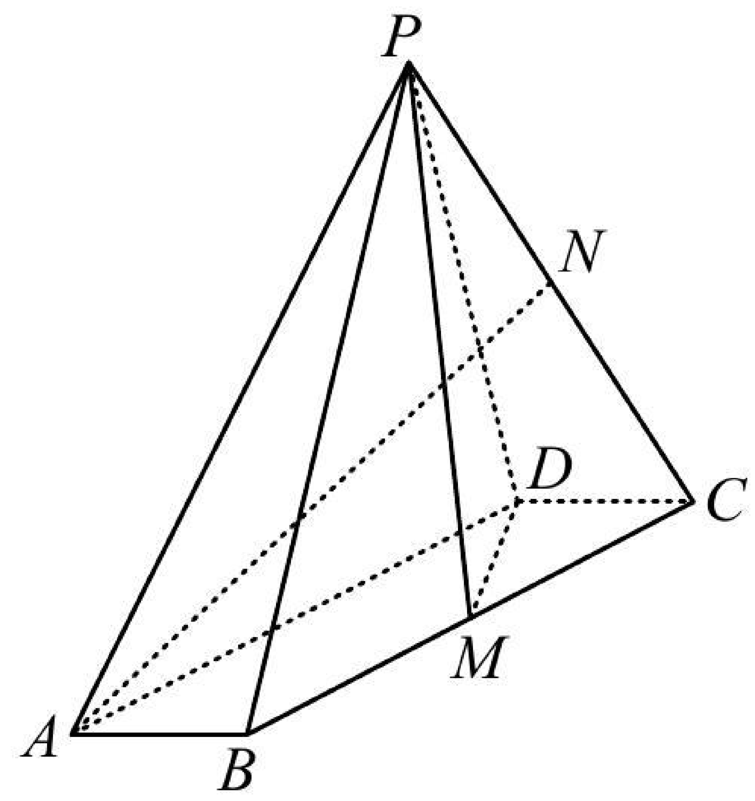
设 $B_1G \cap BF = H$，则 $\angle GHB = 90^\circ$，所以 $BF \perp B_1G$，由题意，$BF \perp A_1B_1$，所以 $BF \perp B_1D$，

因为 B_1D，$B_1G \subset$ 平面 B_1DEG，$B_1D \cap B_1G = B_1$，所以 $BF \perp$ 平面 B_1DEG，

因为 $DE \subset$ 平面 B_1DEG，所以 $BF \perp DE$.



【变式 1】（2021·浙江卷节选）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle ABC = 120^\circ$，$AB = 1$，$BC = 4$，$PA = \sqrt{15}$，M，N 分别是 BC，PC 的中点，$PD \perp DC$，$PM \perp MD$，证明：$AB \perp PM$.



证明：（本题 PM 在底面的投影不好找，故不用三垂线定理找思路，尝试逆推，有两条路径：①假设 $AB \perp PM$ 成立，结合条件 $PM \perp MD$ 可得 $PM \perp$ 面 $ABCD$，故可通过证这一线面垂直来证 $AB \perp PM$；②假设 $AB \perp PM$ 成立，结合条件 $PD \perp DC$（即 $PD \perp AB$）可得 $AB \perp$ 面 PDM，故可通过证这一线面垂直来证明 $AB \perp PM$. 对比发现 $AB \perp$ 面 PDM 更好证，可转化为证 $DC \perp$ 面 PDM，只需在 ΔCDM 中证 $DC \perp DM$）

因为 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle ABC = 120^{\circ}$，所以 $\angle MCD = 60^{\circ}$，$CD = AB = 1$，

又 $BC = 4$，M 为 BC 中点，所以 $CM = 2$，在 ΔCDM 中，由余弦定理，

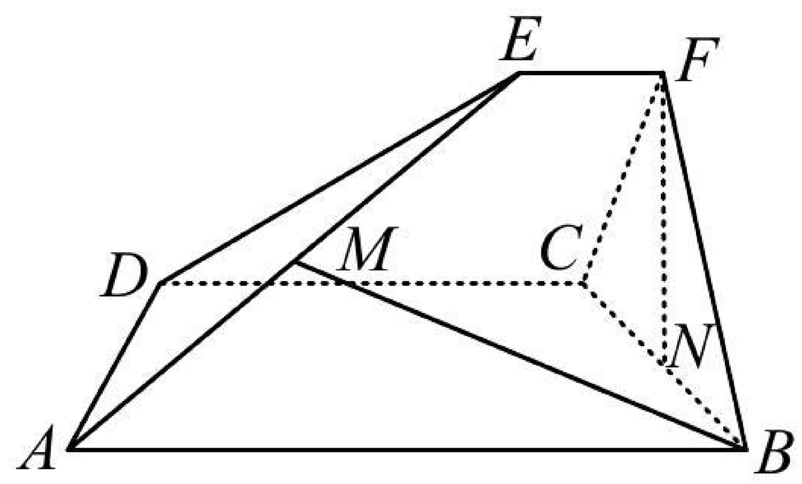
$DM^2 = CD^2 + CM^2 - 2CD \cdot CM \cdot \cos\angle MCD = 3$，从而 $DM^2 + CD^2 = 4 = CM^2$，故 $DC \perp DM$，

又 $PD \perp DC$，且 PD，$DM \subset$ 平面 PDM，$PD \cap DM = D$，所以 $DC \perp$ 平面 PDM，

因为 $AB /\!/ DC$，所以 $AB \perp$ 平面 PDM，又 $PM \subset$ 平面 PDM，所以 $AB \perp PM$.

【反思】用逆推法寻找上一步的线面垂直，若遇到多种可能性，则可通过对比，选择一条简单可行的路径.

【变式 2】（2022•浙江卷节选）如图，已知 $ABCD$ 和 $CDEF$ 都是直角梯形，$AB /\!/ DC$，$DC /\!/ EF$，$AB = 5$，$DC = 3$，$EF = 1$，$\angle BAD = \angle CDE = 60^{\circ}$，二面角 $F - DC - B$ 的平面角为 60°，设 M，N 分别为 AE，BC 的中点，证明：$FN \perp AD$.



证明：（逆推发现题目没有垂直条件，找不到面，怎么办？其实题目的数据隐藏着 ΔCFB 为等边三角形，于是 $FN \perp BC$，故若假设 $FN \perp AD$，则 $FN \perp$ 面 $ABCD$，这样面就找到了）

因为 $ABCD$ 和 $CDEF$ 都是直角梯形，$AB /\!/ DC$，$DC /\!/ EF$，$\angle BAD = \angle CDE = 60^{\circ}$，

所以 $\angle FCD = \angle BCD = 90^{\circ}$，故 $\begin{cases} CD \perp CF \\ CD \perp CB \end{cases}$ ①，

所以 $\angle FCB$ 是二面角 $F - DC - B$ 的平面角，由题意，$\angle FCB = 60^{\circ}$，

如图，作 $EP \perp CD$ 于 P，则 $PC = EF = 1$，$PD = DC - PC = 2$，$PE = PD \cdot \tan\angle EDP = 2\sqrt{3}$，所以 $CF = 2\sqrt{3}$，

同理，在直角梯形 $ABCD$ 中可求得 $BC = 2\sqrt{3}$，所以 $BC = CF$，故 ΔBCF 是正三角形，

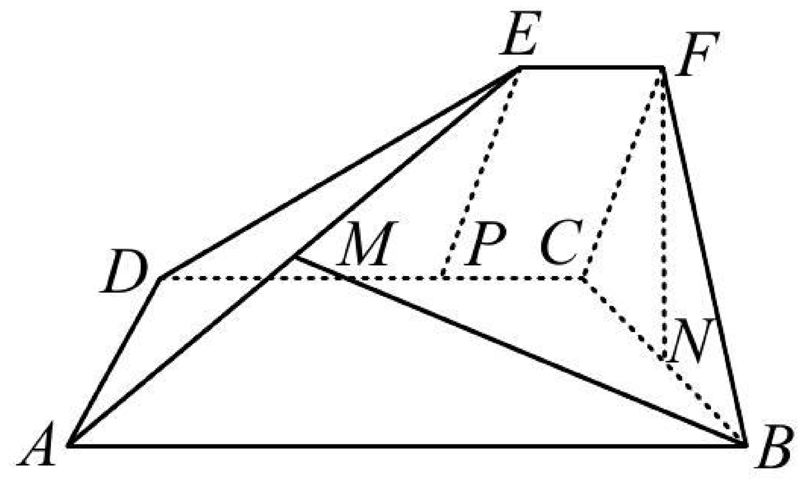
又 N 为 BC 的中点，所以 $FN \perp BC$ ②，

由①结合 CF，$CB \subset$ 平面 BCF，$CF \cap CB = C$ 可得 $CD \perp$ 平面 BCF，

因为 $FN\subset$ 平面 BCF，所以 $FN\perp CD$，

结合②以及 BC，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，$BC\cap CD=C$ 可得 $FN\perp$ 平面 $ABCD$，

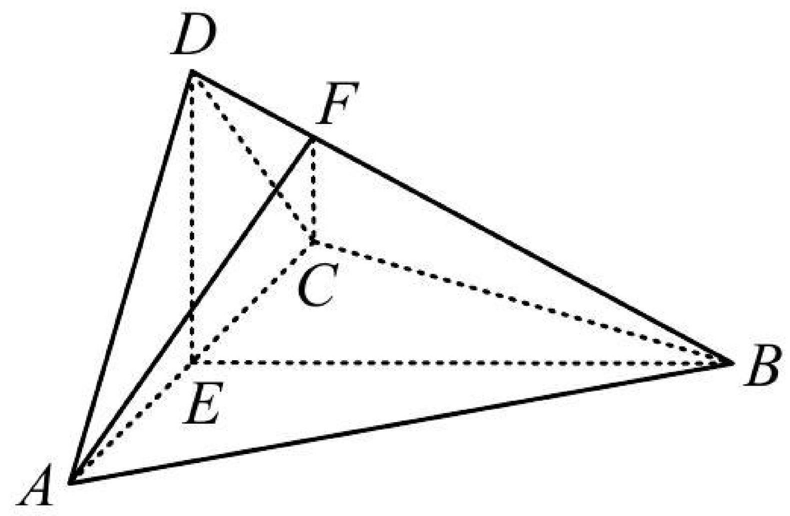
又 $AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $FN\perp AD$.



【总结】①三垂线定理是证异面直线垂直的好方法，但当投影不易找时会失效；②逆推法是通法，但有时题干没有其它线线垂直，不易直接逆推线面垂直，此时往往题目数据隐藏着垂直条件，需要仔细挖掘.

类型Ⅲ：面面垂直判定的逆推思路

【例 3】（2022·全国乙卷节选）如图，四面体 $ABCD$ 中，$AD\perp CD$，$AD=CD$，$\angle ADB=\angle BDC$，E 为 AC 中点，证明：平面 $BED\perp$ 平面 ACD.



证明：（要证面面垂直，先找线面垂直，观察图形发现不外乎证 $BE\perp$ 面 ACD，或证 $AC\perp$ 面 BED，若选 $BE\perp$ 面 ACD，则由所给条件只能证出 $BE\perp AC$，不够，故选 $AC\perp$ 面 BED）

因为 $AD=CD$，E 为 AC 中点，所以 $AC\perp DE$ ①，

又 $\angle ADB=\angle BDC$，$AD=CD$，$BD=BD$，所以 $\Delta ADB\cong\Delta CDB$，从而 $AB=BC$，故 $AC\perp BE$ ②，

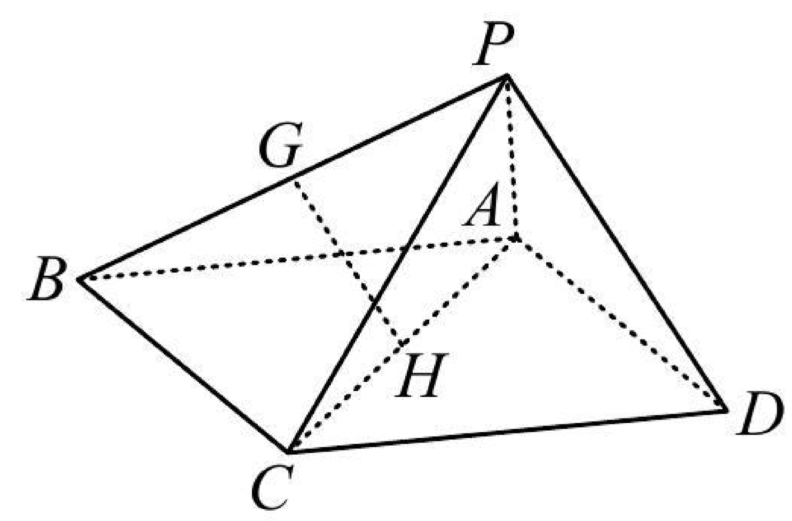
由①②结合 DE，BE 是平面 BED 内的相交直线可得 $AC\perp$ 平面 BED，

又 $AC\subset$ 平面 ACD，所以平面 $BED\perp$ 平面 ACD.

【总结】从类型Ⅰ到类型Ⅲ，我们发现最终都回归到线面垂直上，只要掌握了逆推思路这一通法，学会结合条件分析，即可无往不胜.

类型Ⅳ：已知面面垂直的常用辅助线作法

【例 4】如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，ΔPCD 为等边三角形，平面 $PAC\perp$ 平面 PCD，$PA\perp CD$，$CD=2$，$AD=3$，证明：$PA\perp$ 平面 PCD.



证明：（要证线面垂直，需在面内找两条相交直线与 PA 垂直，只给了 $PA\perp CD$，另一条怎么找？看到面面

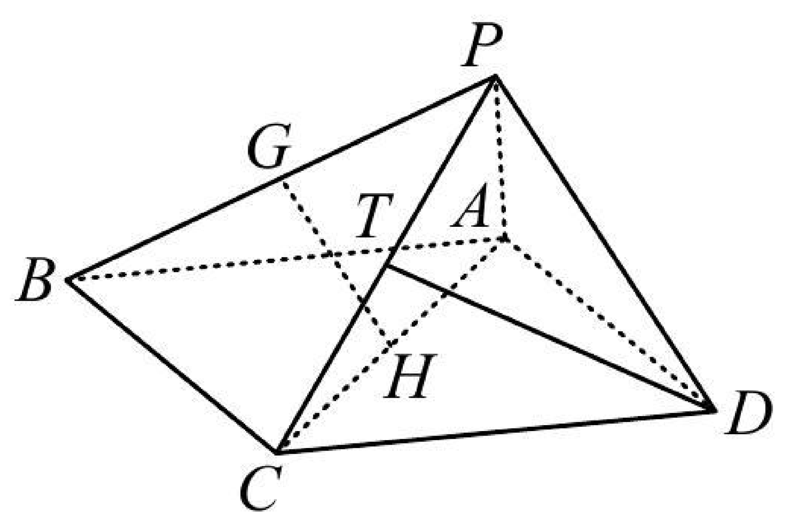
垂直的条件，想到过 A 或 D 作两个面交线 PC 的垂线，思路就有了）

如图，取 PC 中点 T，连接 DT，因为 ΔPCD 为等边三角形，所以 $DT\perp PC$，

又平面 $PAC\perp$ 平面 PCD，平面 $PAC\cap$ 平面 $PCD=PC$， $DT\subset$ 平面 PCD，所以 $DT\perp$ 平面 PAC，

因为 $PA\subset$ 平面 PAC，所以 $PA\perp DT$，

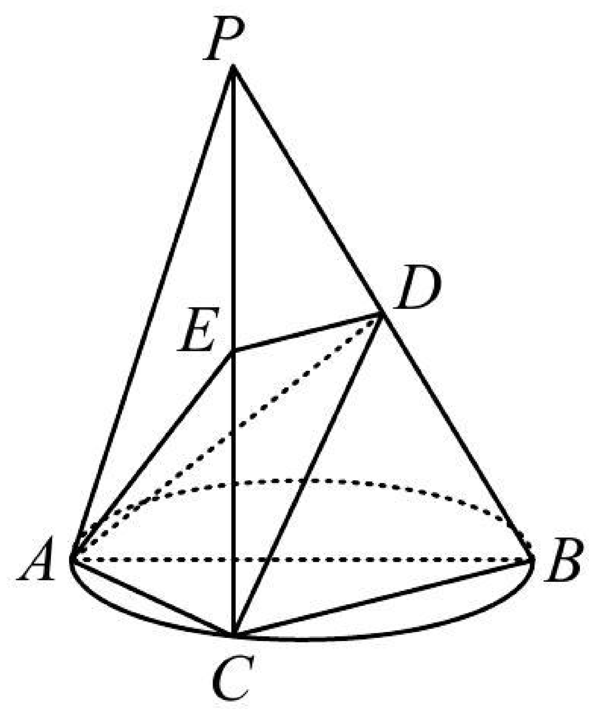
又 $PA\perp CD$，且 DT，CD 是平面 PCD 内的相交直线，所以 $PA\perp$ 平面 PCD.



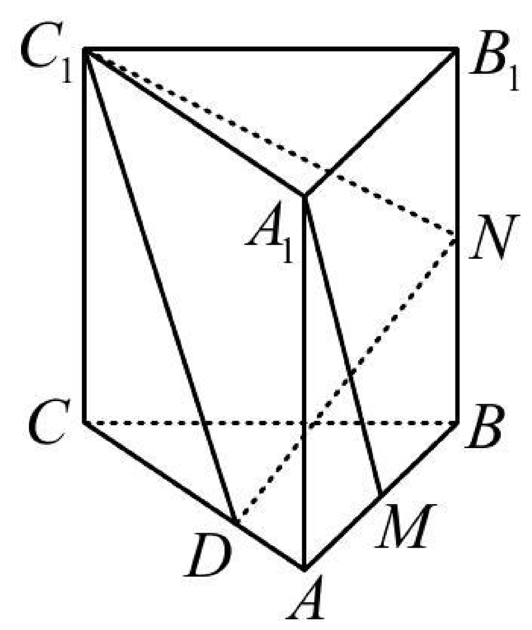
【总结】若题目出现面面垂直条件，则过某面内顶点作交线的垂线，寻找想要的线面垂直，是常见的思路.

强化训练

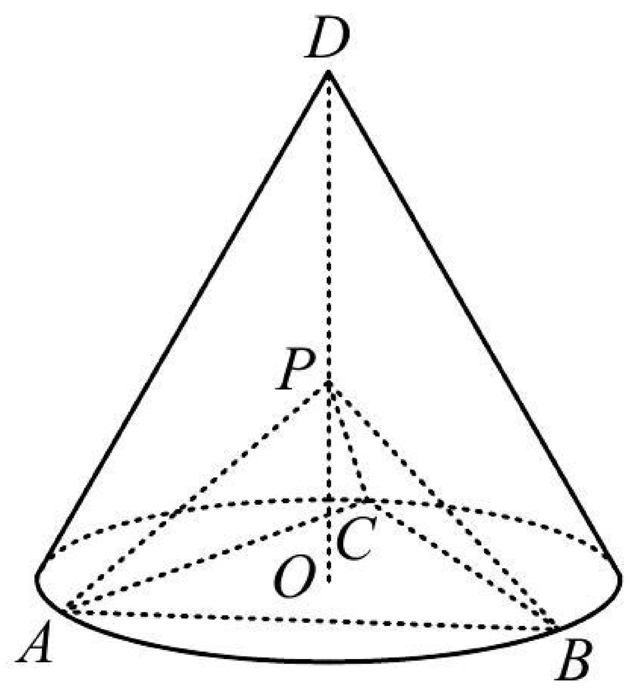
1．（2023 • 成都模拟 • ★★）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，AB 是 ΔABC 的外接圆直径，PC 垂直于圆所在的平面，D，E 分别是棱 PB，PC 的中点，证明： $DE\perp$ 平面 PAC.



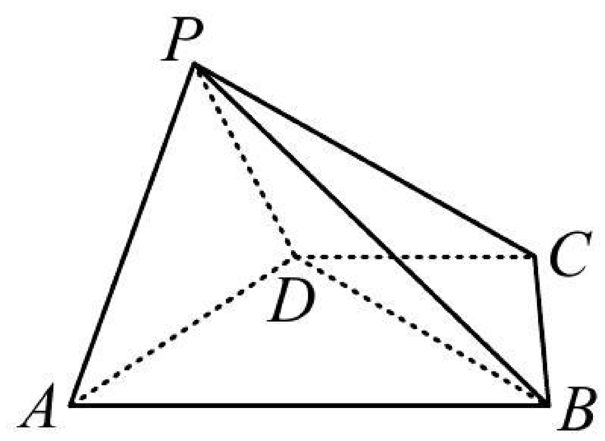
2．（2022 • 昆明模拟 • ★★）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 ACC_1A_1 为正方形，$\angle CAB=90^{\circ}$，$AC=AB=2$，M，N 分别为 AB 和 BB_1 的中点，D 为棱 AC 上的点，证明： $A_1M\perp DN$.



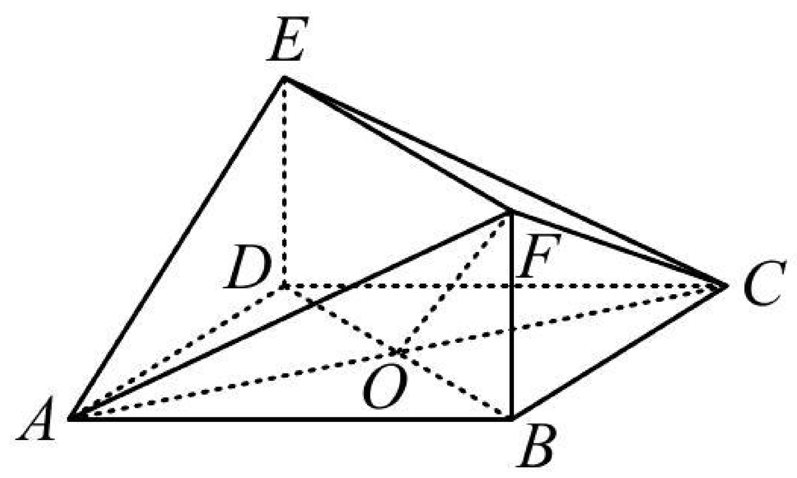
3．（2020·新课标Ⅰ卷·★★）如图，D 为圆锥的顶点，O 是圆锥底面的圆心，ΔABC 是底面的内接正三角形，P 为 DO 上一点，$\angle APC=90^{\circ}$，证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PAC.



4.（2023·榆林一模·★★）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB // CD$，$\angle DAB=60^{\circ}$，$PA\perp PD$，且 $PA=PD=\sqrt{2}$，$AB=2CD=2$，证明：$AD\perp PB$.



5．（2023·吉林模拟·★★★）如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle DAB=60^{\circ}$，四边形 $BDEF$ 为矩形，$BD=2BF=2$，AC 与 BD 交于点 O，$FA=FC$，证明：$DE\perp$ 平面 $ABCD$.



6.（★★★）如图，三棱台 $DEF-ABC$ 中，面 $ADFC\perp$ 面 ABC，$\angle ACB=\angle ACD=45^{\circ}$，$DC=2BC$，证明：$EF\perp DB$.